PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA SIMPLE EN ESTÁTICA, UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL: NIVEL INTRODUCTORIO.

Problema 2

Se tiene un sistema de corrientes constituido por un cilindro de radio R y longitud infinita, coaxial con el eje z, el cual transporta una corriente de densidad $\overline{J} = J_0 \overline{1z}$, más un filamento ubicado en el eje z que transporta una corriente lineal I_0 en dirección de z negativa.

a) Elaborar un bosquejo de esta distribución de corrientes.

b) Explicar por qué el campo magnético producido por esta distribución de corrientes es de la forma $\overline{H}(\rho) = \overline{1\varphi}\, H_{\varphi}(\rho)$.

c) Determinar el campo magnético producido en todo el espacio por esta distribución de corrientes.

Solución.

a) Bosquejo del sistema.

En la figura 1 de la siguiente se muestra una sección longitudinal del sistema de corrientes. La corriente lineal se muestra en marrón oscuro, las líneas de flujo de la densidad de corriente se representan en marrón claro.

b) Forma del campo.

Por la geometría de las corrientes, y debido a que la densidad de corriente es constante, el campo magnético sólo depende de la coordenada ρ.

Por la regla de la mano derecha, se tiene que $H_z = 0$. Por la Ley de Gauss para el campo magnético, cuando dicho campo sólo depende de ρ, resulta que H_ρ es nulo. En resumen, el campo magnético es de la forma $\overline{H} = \overline{1\varphi}\, H_\varphi(\rho)$.

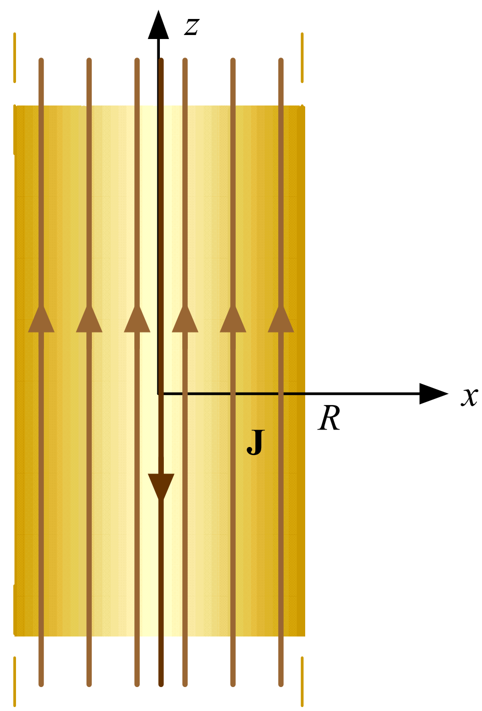

Fig. 1: Sección longitudinal del sistema de corrientes.

c) Cálculo del campo magnético.

Para calcular el campo magnético se utiliza la Ley de Ampère en forma diferencial. Esta Ley debe aplicarse por separado para el campo dentro y fuera del volumen del cilindro con corriente.

Para $0 < \rho \le R$ se tiene:

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} = J_0 \overline{1z}$$

Sustituyendo la componente z del rotacional, se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\, H_\varphi(\rho)\right) = J_0 \Rightarrow d\left(\rho\, H_\varphi(\rho)\right) = \rho\, J_0\, d\rho$$

Integrando de ambos lados y despejando:

$$\rho\, H_\varphi(\rho) = \int \rho\, J_0\, d\rho = \frac{\rho^2}{2} J_0 + C_1 \Rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{\rho}{2} J_0 + \frac{C_1}{\rho}$$

Nótese que se incluyó una constante de integración, ya que la integral es indefinida. Para el cálculo de la constante, tomando en cuenta que hay una corriente lineal en el eje z, se aplica la Ley de Ampére en forma integral sobre un contorno que rodee al eje z en sentido antihorario:

$$\lim_{\rho\to 0} \oint_L \overline{H} \cdot \overline{dl} = -I_0 = \lim_{\rho\to 0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho}{2} J_0 + \frac{C_1}{\rho}\right) \rho\, d\varphi = 2\pi\, C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{I_0}{2\pi}$$

Por lo tanto, el campo magnético dentro del cilindro es:

$$H_\varphi(\rho) = \frac{\rho\, J_0}{2} - \frac{I_0}{2\pi\,\rho}$$

Nótese que el campo magnético es singular en el eje z debido a la presencia de la corriente lineal. Si no se tuviese dicha corriente, la constante de integración hubiese sido nula y el campo magnético no fuera singular.

Para $\rho \geq R$ se tiene:

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} = 0\overline{1}_z$$

Aunque no hay corrientes en el volumen considerado, se le asignó la dirección z al vector nulo por la dirección de las corrientes en el sistema. Sustituyendo la componente z del rotacional, resulta:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\, H_\varphi(\rho)\right) = 0 \Rightarrow \rho\, H_\varphi(\rho) = C_2 \Rightarrow H_\varphi(\rho) = \frac{C_2}{\rho}$$

Para determinar la constante, se aplica la condición de frontera de la Ley de Ampère en la superficie $\rho = R$:

$$\overline{1\rho} \times \left[\overline{H}\Big|_{\rho=R^+} - \overline{H}\Big|_{\rho=R^-} \right] = \overline{K}\Big|_{\rho=R} = \overline{0}$$

De aquí se obtiene que:

$$\frac{C_2}{R} = \frac{R\,J_0}{2} - \frac{I_0}{2\pi R} \Rightarrow C_2 = \frac{R^2\,J_0}{2} - \frac{I_0}{2\pi} = \frac{\pi\, R^2\, J_0 - I_0}{2\pi}$$

Por lo tanto, el campo magnético fuera del cilindro de corriente es:

$$H_\varphi(\rho) = \frac{\pi\, R^2\, J_0 - I_0}{2\pi\,\rho}$$

En resumen, el campo magnético producido por este sistema de corrientes es:

$$\overline{H}(\rho) = \begin{cases} \overline{1\varphi}\left(\dfrac{\rho\, J_0}{2} - \dfrac{I_0}{2\pi\,\rho}\right), & \text{si } 0 \le \rho < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ |z| < \infty \\ \overline{1\varphi}\ \dfrac{\pi\, R^2\, J_0 - I_0}{2\pi\,\rho}, & \text{si } \rho \ge R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ |z| < \infty \end{cases}$$